Iniciemos la clase 1 recordando qué es un conjunto: "es una colección de objetos, cada uno de los cuales recibe el nombre de elemento del conjunto".
Si esos elementos son números, entonces se los denomina "conjuntos numéricos".
Los números reales 0, 1, 2, 3, etc. se denominan números naturales N. Son los que habitualmente usamos para contar.
Para su representación gráfica se utiliza una recta donde se considera un punto cualquiera como el origen 0 (cero) y se utiliza un segmento arbitrario como unidad.

0 1 2 3

Cabe aclarar que algunos autores no consideran el cero (0) dentro del conjunto de los números naturales y otros sí, lo incluyen. Nosotros adoptamos la segunda posición, es decir, incluir el cero (0) dentro del conjunto de los números naturales:
"Si sumamos o multiplicamos dos números naturales cualesquiera, el resultado siempre es otro número natural. Por ej:

$$8 + 5 = 13$$

$$9 \cdot 3 = 27$$

En cambio, si restamos o dividimos dos números naturales, el resultado no siempre es un número natural. Por ej:

$$8 - 3 = 5$$

$$9 \div 3 = 3$$

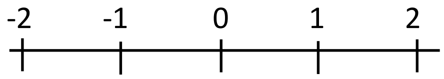
son números naturales, pero:

$$5 - 8 = \ldots$$

$$2 \div 7 = \ldots$$

no dan como resultado un número natural". (Arya -Larder, 2009)

Para salvar esta dificultad se extiende el sistema de los números naturales al sistema de los **números enteros Z**, en donde se les agrega a los naturales los **enteros negativos**, es decir, los naturales precedidos por el signo menos.
Si utilizamos la misma recta anterior, y teniendo en cuenta que cada número negativo equidista del origen, respecto de su correspondiente número natural, podemos representarlos de la siguiente manera:



Si bien con esto se resuelve que la suma, multiplicación o resta de dos enteros cualesquiera es otro entero, ¿qué ocurre con la división?. Por ejemplo:

$$8 \div (-4) = -2$$
$$9 \div 7 = \ldots$$

Esta limitación la podemos salvar incorporando nuevos números como los **números racionales Q.**
Se definen a los números racionales como fracciones periódicas o no periódicas; o también como el cociente de dos números enteros, a/b, en donde: “a” y “b” siendo enteros, representan el numerador y el denominador de esa fracción.
Por ejemplo:

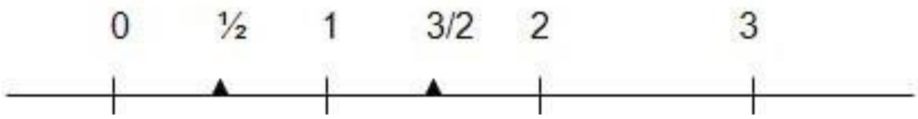
$$\frac{3}{4}; -\frac{8}{3}; \frac{-2}{9}; \frac{1}{3}; etc.$$

Pero cuidado, ¡“b” debe ser siempre distinto de cero!
Cuando en las divisiones de números enteros, el dividendo no es múltiplo del divisor, surge este nuevo conjunto.
Un número fraccionario también puede escribirse como una expresión decimal. Ésta puede ser finita o infinita.
Esto es:

$$\frac{1}{4} = 0{,}25$$ Expresión decimal finita.

$$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$$ Expresión decimal infinita.

Estos números fraccionarios pueden representarse sobre la recta, construyendo las fracciones sobre la misma, como se muestra a continuación.



Recordemos que el numerador de la fracción indica la cantidad de unidades que debe tomar sobre la recta y el denominador la cantidad de particiones que se debe realizar sobre ese segmento:

“Estos números son muy usados a la hora de medir longitudes, pesos, voltajes, etc. ¿Sirven los números racionales para medir todas las magnitudes?

La respuesta es, no. Este sorprendente hecho fue descubierto por los antiguos *griegos varios siglos antes de Cristo. Demostraron que a pesar de que mide la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos lados tienen longitudes unitarias, no pueden escribirse como el cociente de dos números enteros. Por lo tanto no es un número racional, si no irracional". (Purcell- Varberg, 1993)*

Entonces los **números irracionales** son aquellos que no se pueden expresar como el cociente de dos números enteros, como por ejemplo:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots; \qquad \sqrt{3} = 1{,}7320\ldots; \qquad \pi = 3{,}14159\ldots; \qquad e = 2{,}\ 7172\ldots;$$

y una gran cantidad de números más.

Los números irracionales son aquellos que no se pueden escribir como fracciones periódicas o no periódicas, con lo cual tienen infinitas cifras decimales y sin embargo no forman período.
Estos números también pueden ser graficados en la recta, intercalándose entre los números racionales, formando un conjunto bastante denso.
El conjunto de números **racionales** junto con el conjunto de números **irracionales** forman el conjunto de los **números reales R**, que representados gráficamente se corresponden con todos los puntos de la recta.
Puede recordar una correspondencia biunívoca que dice: a cada número real le corresponde un punto sobre la recta y viceversa, a cada punto en la recta le corresponde un número real.
Una característica del conjunto de número reales es que éstos conforman un conjunto **denso**, es decir que entre un número real y otro, existen infinitos números.
Todos estos números conforman el conjunto de los **números reales**.

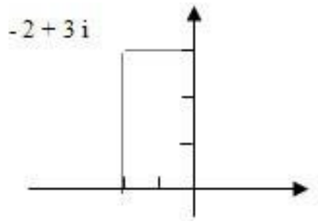
A modo de síntesis podemos decir:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{Naturales: } \mathbf{N}\\ \text{Enteros negativos}\end{array}\right\}\text{Enteros: } \mathbf{Z}\\ \text{Fraccionarios}\end{array}\right\}\text{Racionales: } \mathbf{Q}\\ \text{Irracionales}\end{array}\right\}\text{Números reales: } \mathbf{R}$$

También existen los **números complejos** que completan todo el sistema de números que utilizaremos a lo largo de este curso. Recordemos que los números complejos están formados por una parte real y otra imaginaria. Por ejemplo:

$$-2+3\cdot i; \quad 1-8\cdot i; \quad 0+i; \ \text{donde: } i = \sqrt{-1} \ \text{o bien, } i^2 = -1.$$

Para poder graficarlos se necesita de los ejes de coordenadas cartesianas. Sobre el eje "x" (abscisa) se determina el componente real y sobre el eje "y" (ordenada) el coeficiente imaginario. La intersección de ambos valores muestra el punto correspondiente al número complejo. Observa el gráfico:



En algunas ecuaciones de segundo grado suelen presentarse estos números complejos como raíces de la ecuación cuando el discriminante de la fórmula correspondiente es negativo. ¡Este tema que abordaremos más adelante!

Para pensar y reflexionar

Ahora la pregunta es: ¿todos estos conjuntos numéricos son importantes en Matemática? Si la respuesta es sí, es que nos estamos amigando con esta ciencia formal y de hecho, ¡haremos uso de ellos en todo momento, si hacemos camino en alguna carrera de Ingeniería o de Ciencias Económicas!
¿Vamos por más?

1.3 OPERACIONES ARITMÉTICAS BÁSICAS

Se entiende por operaciones básicas: la suma, la sustracción, el producto y el cociente, aunque no son las únicas. Lo que debe tener presente en cada caso son las reglas de los signos correspondientes, que se detallan y especifican a continuación:

- Un signo (+) que precede a un paréntesis, corchete o llave, no cambia los signos interiores. Por ej:

$$-3+(4+7)=-3+4+7=8$$

- Un signo (-) que antecede a un paréntesis, corchete o llave, cambia los signos interiores. Por ej:

$$-3-(-4+8)=-3+4-8=-7$$

El siguiente ejercicio plantea las operaciones básicas (suma y resta) con el conjunto de los números enteros:

$$-6-\{2+[-9+4-(-7+1)-2]\}+5=$$

Observemos cómo fue resuelto:

$$-6-\{2+[-9+4-(-7+1)-2]\}+5=$$

$$-6-\{2+[-9+4+7-1-2]\}+5=$$

$$-6-\{2-9+4+7-1-2\}+5=$$

$$-6-2+9-4-7+1+2+5=-2$$

IMPORTANTE: para llegar al resultado final, primero debemos eliminar los paréntesis, luego los corchetes y por último la llave; en ese orden, para no cometer errores.

También podemos calcular el resultado parcial de los elementos encerrados en el paréntesis, respetando el signo que lo antecede, y así sucesivamente con el corchete y llave.

Observemos el ejemplo:

$$-6 - \{ 2 + [-9 + 4 - (-6) - 2] \} + 5 =$$
$$-6 - \{ 2 + [-9 + 4 + 6 - 2] \} + 5 =$$
$$-6 - \{ 2 + [-1] \} + 5 =$$
$$-6 - \{ 2 - 1 \} + 5 =$$
$$-6 - \{ 1 \} + 5 =$$
$$-6 - 1 + 5 = -2$$

Para resolver los siguientes ejercicios elegiremos la manera con la que nos sintamos más seguros. Usaremos las respuestas para la autoevaluación.

Actividad

a)	$3 - \{ 2 + 4 - [5 + 1 - (2 + 3 - 8)] - 3 + 9 \} =$	Rta: 0
b)	$-10 + \{ 3 - [2 - 15 + 9 + (2 - 7) - 6] \} + 4 =$	Rta: 12
c)	$-\{ 7 - 8 + [15 - 12 - (14 + 1 - 9) + 5] \} =$	Rta. - 1
d)	$-15 - \{ 6 + [(-3 + 1 - 8) - (4 - 1)] - 7 \} + 1 =$	Rta: 0
e)	$-8 + (-7 + 5) + 3 - [2 - (4 - 9) + 3] - (-7) + 9 =$	Rta: - 1

En el caso del producto, se cumple:

$$a)\ (+)\cdot(+)=(+) \quad b)\ (-)\cdot(-)=(+)$$
$$c)\ (+)\cdot(-)=(-) \quad d)\ (-)\cdot(+)=(-)$$

$$9\cdot(-3)=-27$$
$$(-1)\cdot(-3)=3$$

Por ejemplo:

Para el cociente, se cumple:

$$a)\ \frac{(+)}{(+)} = (+) \qquad b)\ \frac{(-)}{(-)} = (+)$$

$$c)\ \frac{(-)}{(+)} = (-) \qquad d)\ \frac{(+)}{(-)} = (-)$$

Por ejemplo:

$$\frac{9}{-3} = -3$$

$$\frac{-10}{-2} = 5$$

Otros ejemplos de operaciones sencillas

$$\frac{2}{\ } + \left(-\frac{1}{7}\right) = \frac{14-3}{\ } = \frac{11}{\ } \qquad -\frac{\ }{3} + \left(\ \right) + \quad \frac{2 \quad 3}{21} \quad \frac{2}{21}$$

$$\frac{4}{3} - \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{32+3}{24} = \frac{35}{24} \qquad -\frac{1}{7} \cdot \frac{14}{3} = -\frac{2}{3}$$

Para los dos últimos ejemplos de productos de fracciones, es aconsejable simplificar numeradores con denominadores (si se puede) y luego operar aritméticamente.
Observemos en los dos siguientes ejemplos como un cociente de fracciones, o una fracción de fracción, se puede resolver transformando el cociente en un producto, multiplicando por la recíproca del denominador.

$$\frac{4}{3} \div \frac{8}{3} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{8}{3}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{3} \div 4 = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{12}$$

Importante
Es fundamental recordar el orden de las operaciones. Los paréntesis indican prioridades, las multiplicaciones o divisiones también. El pasaje de términos de un lado a otro del signo igual es también importante y es la causa más frecuente de errores. En operaciones de suma y resta, si un término cambia de miembro, cambia el signo de la operación. En operaciones de multiplicación o división, si un término cambia de miembro, cambia la operación.

Analicemos a continuación varios ejemplos válidos y no válidos:

$$2 \cdot (4 + 6) = 2 \cdot (10) = 20$$
$$(3 \cdot (-2)) + 4 = -6 + 4 = -2$$

En estos ejercicios conviene separar en términos a la hora operar matemáticamente:

$$\frac{7-3}{2} - 2 = \frac{4}{2} - 2 = 0$$
$$(2 \cdot 3) - \frac{12}{3} = 6 - 4 = 2$$

Si se trata de transponer términos:

o bien:

4

$2 + 1 = 7$

3 3

3

Observemos detenidamente el siguiente ejemplo y nuevamente notaremos la importancia del uso de paréntesis y/o corchetes.
Recordemos que **no** se debe escribir dos signos seguidos. Estos **deben** estar separados por alguna de estas herramientas: paréntesis, corchetes, etc.

$$72:[18+(-2).3]-[4.(-5)-9:3]=$$
$$72:[18-6]-[-20-3]=$$
$$[72:12]-[-23]=$$
$$6 + 23 = 29$$

Los siguientes ejercicios combinan todas las operaciones elementales con los conjuntos de números presentados hasta ahora.

No olvidemos respetar todos los conceptos anteriores para lograr el resultado correcto. Como en los ejercicios anteriores, usaremos las respuestas para autoevaluarnos.

Actividad

a) $\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)=$ Rta: $-\frac{5}{12}$

b) $\left(\frac{7}{3}-4\right)-\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\right)=$ Rta: $-\frac{47}{30}$

c) $\left(\frac{1}{2}.\frac{3}{4}\right)+\frac{4}{3}=$ Rta: $\frac{7}{8}$

d) $\frac{\frac{3}{4}-2}{\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\right)=$ Rta: $\frac{19}{8}$

e) $\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}}-\left(\frac{\frac{7}{15}}{\frac{1}{5}}\right)=$ Rta: 0

Para pensar y reflexionar

Hemos avanzado hasta esta instancia; nos podemos formular otra pregunta:

¿existen otras operaciones básicas del álgebra elemental que se pueden realizar con los conjuntos numéricos? Si la respuesta es afirmativa, ¡podemos seguir avanzando!