2.4 REGLA DE RUFFINI

Como hemos visto, el polinomio que resulta después de realizar la división se denomina polinomio cociente y se lo simboliza como C(x) y al resto como R(x). La división termina cuando el polinomio resto es de un grado menor que el polinomio divisor.

Importante

Recordemos que no siempre se obtiene un polinomio resto igual a cero. Si ocurre esto último, ¡se dice que la división es exacta!

El procedimiento que acabamos de ver es general para cualquier tipo de división entre polinomios. No obstante, existe una regla práctica para resolver el cociente que se puede aplicar cuando los polinomios dividendo y divisor son en una sola indeterminada y el polinomio divisor es de la forma $(x \pm a)$, siendo “a” un número real. Dicha regla se conoce como **Regla de Ruffini,** es la que nos permite calcular de una manera más simple y directa los coeficientes del polinomio cociente y el resto de la división.

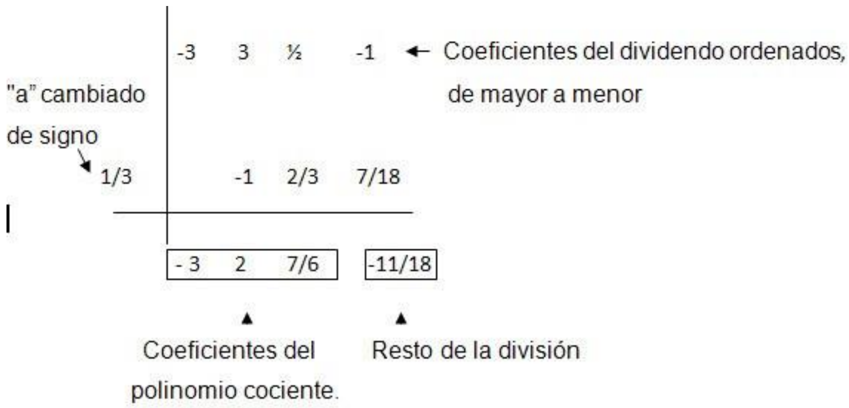
Analicemos el ejemplo siguiente. Después intentemos la explicación de cómo operar:

$$\left(\frac{1}{2}x - 1 - 3x^3 + 3x^2\right) : \left(x - \frac{1}{3}\right)$$

Primero ordenamos y completamos si hiciera falta, el polinomio dividendo. (Recordemos que para completar debemos hacerlo con coeficiente cero, por x elevada a la potencia faltante).

$$\left(-3x^3 + 3x^2 + \frac{1}{2}x - 1\right) : \left(x - \frac{1}{3}\right)$$

El esquema que se muestra a continuación, es utilizado frecuentemente como una manera práctica de obtener los coeficientes del polinomio cociente y el resto de la división.



Entonces el resultado a explicitar será:

$$C_{(x)} = -3x^2 + 2x + \frac{7}{6}$$

$$R_{(x)} = -\frac{11}{18}$$

¿Cómo se opera con esta regla práctica?

En la fila superior colocamos los coeficientes del polinomio dividendo, de manera ordenada, completa y decreciente respecto de “x”. En el vértice exterior izquierdo ubicamos el valor de “a”, del binomio divisor, cambiado de signo.

Debajo de la línea horizontal, pondremos de forma ordenada los coeficientes que resulten para el polinomio cociente y el resto de la división.

El primer coeficiente del polinomio cociente es siempre igual al del dividendo, por lo tanto lo colocamos directamente debajo de la línea horizontal.

Para obtener el segundo coeficiente del polinomio cociente, multiplicamos el primer coeficiente por “a” cambiado de signo, como ya figura en el vértice antes mencionado, y ese resultado se suma con el segundo coeficiente del dividendo (ubicado en la fila superior).

Una vez que obtuvimos el segundo coeficiente del cociente, repetimos la operación anterior (multiplicamos por “a” cambiado de signo y sumamos con el siguiente coeficiente) y así sucesivamente hasta terminar.

Observemos que sólo hemos calculado coeficientes, por lo tanto aún, nos falta determinar el polinomio cociente, y el resto de la división.

¿De qué grado será el polinomio cociente?

El grado del divisor siempre es uno (1) y además deberá tener en cuenta que en la división de potencias de igual base los exponentes se restan entre sí.

Con todos estos elementos y un pequeño esfuerzo, estaremos en condiciones de plantear el polinomio cociente completo y determinar el resto o residuo de la división. Intentémoslo en la actividad propuesta más adelante. Utilizaremos el ejemplo anterior para ayudarnos.

Para saber más

Para conocer más a Ruffini, podemos visitar esta dirección:

http://es.wikipedia.org/wiki/Paolo_Ruffini

La regla de Ruffini es muy útil para factorizar polinomios de grado “n” cuando se conoce una de las raíces del mismo. Con la raíz se puede formar el binomio de la forma $(x \pm a)$ según corresponda, obtener el polinomio cociente, y de esta manera plantear su forma factorizada, ya que siempre el resto es cero. Observemos el ejemplo.

Dado el polinomio $x^3 + x^2 - 4x + 2$, se sabe que una de sus raíces es uno, esto es $x_1 = 1$.

Por lo tanto el binomio $(x - 1)$ es divisor exacto del polinomio dado. Aplicando la regla de Ruffini se determina el polinomio cociente, según:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 1 & -4 & 2 \\
1 & & 1 & 2 & -2 \\
\hline
 & 1 & 2 & -2 & 0
\end{array}
$$

Entonces: $C_{(x)} = x^2 + 2x - 2$ y $R_{(x)} = 0$

Por lo tanto:

$$x^3 + x^2 - 4x + 2 = (x^2 + 2x - 2)(x - 1)$$

Importante

A esta problemática de factoreo la retomaremos en la siguiente clase, ya que es un concepto muy importante, ¡y merece más desarrollo!

Vamos con alguna ejercitación interesante para aplicar la Regla de Ruffini y al realizarla controle sus respuestas con la información dada.

Actividad

$a)\quad (x^2 - 2x + 1) : (x + 1) =$

$Rta : C = x - 3 \qquad R = (4)$

$b)\quad \left(4x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2\right) : (x - 3) =$

$Rta : C = 4x^2 + \frac{23}{2}x + \frac{75}{2} \qquad R = (221/2)$

$c)\quad (x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x + 39) : (x + 3) =$

$Rta : C = x^3 - 2x + 13 \qquad R = (0)$

$d)\quad (5x + 7x^3 - 13) : (x + 1/2) =$

$Rta : C = 7x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{27}{4} \qquad R = (-131/8)$

2.5 TEOREMA DEL RESTO

Del mismo modo que existe la regla de Ruffini para calcular el cociente y el resto de una división entre polinomios de una manera rápida y sencilla, cuando se cumplen las mismas exigencias descritas anteriormente, es decir, que el polinomio dividendo y divisor son en una sola indeterminada y el polinomio divisor es de la forma: $(x \pm a)$, también es posible calcular sólo el resto de la división, utilizando el Teorema del Resto.

Como su nombre lo indica, nos permite sólo conocer directamente el resto de la división de un polinomio por un binomio de la forma: $(.x \pm a)$
¿Cómo se calcula dicho resto?
El resto es igual al "valor numérico" del polinomio dividendo cuando la variable es sustituida por el valor de "a" cambiado de signo.

Observemos el ejemplo y luego resolvamos los ejercicios planteados en la guía de ejercitación.

Calculemos el resto de la siguiente división: (5 x2 - 2 x + 4): (x + 3)
R=D (-a)=D (-3)=5. (- 3)2 - 2. (- 3) + 4
R=5.9 + 6 + 4 =
R=45 + 10 = 55

Para pensar y reflexionar

¿Qué importancia o utilidad puede tener el conocimiento de este procedimiento conocido como teorema del resto?
Pensemos en el término "divisibilidad". ¿Qué nos sugiere el significado matemático de dicho término?
¿Qué entendemos cuando expresamos que un polinomio es divisible por otro? ¿Cuál sería el resto de esa división?
La respuesta a estos interrogantes o mejor aún la aplicabilidad de este teorema la encontraremos cuando trabajemos con factorización o factor de expresiones algebraicas y se presente el caso "divisibilidad".

Veamos algunas aplicaciones del Teorema de resto.

Actividad

Para ello realizaremos el mismo cuadro de ejercicios propuestos en la última actividad, relacionada con la Regla de Ruffini. ¡¿Lo hacemos?!

Actividad individual

Determinar el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas:

$1 \rightarrow 5x^2y + 3xy^2 + 7xy = \quad para: \quad x = 1 \quad y = -1$

$R = -9$

$2 \rightarrow 4xy^3 + 9x^2y - \frac{2}{3}x = \quad para: \quad x = 2 \quad y = \frac{1}{2}$

$R = \frac{53}{3}$

$3 \rightarrow \frac{x+y}{x-1} + \frac{x+2y}{x-2} - \frac{x-y}{x} = \quad para: \quad x = -2 \quad y = 1$

$R = -\frac{7}{6}$

Efectuar la suma de los siguientes polinomios:

$4 \rightarrow (8xy - 2yz) \quad ; \quad (2xy - z + 6yz) \quad ; (9yz - 7xy - 3z)$

$R = 3xy + 13yz - 4z$

$5 \rightarrow \left(4xy + 3x^2y - \frac{2}{3}xy^2\right); \left(\frac{5}{2}xy^2 + \frac{1}{5}xy - \frac{1}{3}x^2y\right)$

$R = \frac{8}{3}x^2y + \frac{21}{5}xy + \frac{11}{6}xy^2$

Realizar las operaciones indicadas, con los siguientes polinomios:

$P_{(x)} = 2x^4 + 3x^3 - x^2 + 4$

$Q_{(x)} = 6x^3 + 2x^2 - 8x$

$R_{(x)} = -x^3 - \frac{7}{2}x^2 + \frac{3}{2}x$

$6 \rightarrow \left(P_{(x)} + Q_{(x)} - R_{(x)}\right) =$

$R = 2x^4 + 10x^3 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{19}{2}x + 4$

$7 \rightarrow Q_{(x)} - \left(P_{(x)} + R_{(x)}\right) =$

$R = -2x^4 + 4x^3 + \frac{13}{2}x^2 - \frac{19}{2}x - 4$

Completar los siguientes cuadros:

8 →

$P(x) - Q(x)$	$P(x)$	$Q(x)$
$-3x^5 + 4x^2 - x - 4$	$-3x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 4$	

9 →

$P(x) - Q(x)$	$Q(x)$	$P(x)$
$2x^4 + 7x^3 + 8x - 3$	$x^3 - x^2 + 2x$	

Dados los siguientes polinomios, efectuar las operaciones indicadas:

$P_{(z)} = z^2 - 1$

$H_{(y)} = \frac{1}{2} y + \frac{1}{4} y^2 - \frac{3}{4} y^3$

$M_{(x)} = -7x^2 + 1$

$S_{(z,y)} = 2zy + 2z^2$

10 $\rightarrow P_{(z)} . S_{(z,y)} =$

1 $\rightarrow H_{(y)} . M_{(x)} =$

P(x z) = 1/3 x5 z – 2/.3 x4 z2 + 3 x z3 +1/2 x z

W(x z) = -1/2 x2 z

S(x , y) = 36 x y6 – 6 x y3 + 18 x y5 – 12 x y4

T(x ,y) = 3 x y + 6 x y2

R(x) = 2 x4 + x – 3 x3

U(x) = 3 x2 + x

12. P(x , z) : W(x , z)
13. S(x,y) : T(x,y)
14. R(x) : U(x)

Completar los siguientes cuadros:

15 $\rightarrow$

Dividendo	Divisor	Cociente	Resto
$(x + 2)(x - 3)^2$	$x^2 - 6x + 9$		

16 $\rightarrow$

Dividendo	Divisor	Cociente	Resto
$8x^3 + 24xy^2 + 24yx^2 + 8y^3$	$(2x + 2y)^2$		

17 $\rightarrow$

Cociente	Divisor	Dividendo	Grado del Dividendo
$- x^2 - 8x + 9$	$(x - 4)$		

18 $\rightarrow$

P(x) :Q(x)	P(x)	Q (x)	Resto
$x^5 - 4x^3 - 3x^2 - 6x - 4$	$x^2 + 2$		